

Special framed Morse functions on surfaces

E. A. Kudryavtseva

Let M be a smooth closed orientable surface. Let F be the space of Morse functions on M , and \mathbb{F}^1 the space of framed Morse functions, both endowed with C^∞ -topology. The space \mathbb{F}^0 of special framed Morse functions is defined. We prove that the inclusion mapping $\mathbb{F}^0 \hookrightarrow \mathbb{F}^1$ is a homotopy equivalence. In the case when at least $\chi(M) + 1$ critical points of each function of F are labeled, homotopy equivalences $\tilde{\mathbb{K}} \sim \tilde{\mathcal{M}}$ and $F \sim \mathbb{F}^0 \sim \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathbb{K}}$ are proved, where $\tilde{\mathbb{K}}$ is the complex of framed Morse functions, $\tilde{\mathcal{M}} \approx \mathbb{F}^1 / \mathcal{D}^0$ is the universal moduli space of framed Morse functions, \mathcal{D}^0 is the group of self-diffeomorphisms of M homotopic to the identity.

Key words: Morse function, framed Morse function, complex of framed Morse functions, C^∞ -topology, universal moduli space.

MSC-class: 58E05, 57M50, 58K65, 46M18

УДК 515.164.174+515.164.22+515.122.55

Специальные оснащенные функции Морса на поверхностях

Е. А. Кудрявцева

Аннотация

Пусть M — гладкая замкнутая ориентируемая поверхность. Пусть F — пространство функций Морса на M , и \mathbb{F}^1 — пространство оснащенных функций Морса, снабженные C^∞ -топологией. Определено пространство \mathbb{F}^0 специальных оснащенных функций Морса и доказано, что отображение включения $\mathbb{F}^0 \hookrightarrow \mathbb{F}^1$ является гомотопической эквивалентностью. В случае, когда у любой функции из F отмечено не менее чем $\chi(M) + 1$ критических точек, доказаны гомотопические эквивалентности $\tilde{\mathbb{K}} \sim \tilde{\mathcal{M}}$ и $F \sim \mathbb{F}^0 \sim \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathbb{K}}$, где $\tilde{\mathbb{K}}$ — комплекс оснащенных функций Морса, $\tilde{\mathcal{M}} \approx \mathbb{F}^1 / \mathcal{D}^0$ — универсальное пространство модулей оснащенных функций Морса, \mathcal{D}^0 — группа диффеоморфизмов M , гомотопных тождественному.

Ключевые слова: функция Морса, оснащенная функция Морса, комплекс оснащенных функций Морса, C^∞ -топология, универсальное пространство модулей.

1. Введение. Настоящая работа является продолжением работ [1, 2] по изучению топологии пространства $F = F(M)$ функций Морса на гладкой замкнутой ориентируемой поверхности M , снабженного C^∞ -топологией. В работе [1] введено понятие оснащенной функции Морса (см. определение 1) и доказана гомотопическая эквивалентность $F \sim \mathbb{F}^1$ пространства F функций Морса и пространства $\mathbb{F}^1 = \mathbb{F}^1(M)$ оснащенных функций Морса ([1, 2]). В настоящей работе определено пространство $\mathbb{F}^0 = \mathbb{F}^0(M)$ специальных оснащенных функций Морса и доказано, что отображение включения $\mathbb{F}^0 \hookrightarrow \mathbb{F}^1$ является гомотопической эквивалентностью. Согласно [3, 4], в большинстве случаев (см. (10)) имеется гомотопическая эквивалентность $\mathbb{F}^1 \sim R \times \tilde{\mathcal{M}}$, где $R = R(M)$ — одно из многообразий $\mathbb{R}P^3$, $S^1 \times S^1$ и точка (см. (9)), а $\tilde{\mathcal{M}} = \tilde{\mathcal{M}}(M)$ — многообразие, гомеоморфное универсальному пространству модулей оснащенных функций Морса. Мы доказываем, что комплекс $\tilde{\mathbb{K}} = \tilde{\mathbb{K}}(M)$ оснащенных функций Морса (см. [3, 5]) является сильным деформационным ретрактом многообразия $\tilde{\mathcal{M}}$. Тем самым, мы доказываем гомотопическую эквивалентность $F \sim R \times \tilde{\mathbb{K}}$.

Обзор результатов о связных компонентах пространства функций Морса на поверхности, количестве и топологии его орбит при действии диффеоморфизмов, о топологии пространств функций с умеренными особенностями, связи с интегрируемыми системами имеется в [1] (см. также [6]–[8]).

2. Основные понятия и формулировка основного результата.

Определение 1. Пусть M — гладкая (т.е. класса C^∞) связная замкнутая поверхность.

(А) Пусть $F := F_{p,q,r}(M)$ — пространство функций Морса на M , имеющих ровно p критических точек локальных минимумов, q седловых точек и r точек локальных максимумов. Для каждой функции $f \in F$ обозначим через $\mathcal{C}_{f,\lambda}$ множество ее критических точек индекса $\lambda \in \{0, 1, 2\}$, и $\mathcal{C}_f := \mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,1} \cup \mathcal{C}_{f,2}$. Обозначим через F^1 подпространство в F , состоящее из функций Морса $f \in F$, у которых все локальные минимумы равны -1 , а все локальные максимумы равны 1 .

(В) *Оснащенной функцией Морса на ориентированной поверхности M* (см. [1, §9]) называется пара (f, α) , где $f \in F$ — функция Морса на M , α — замкнутая 1-форма на $M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$, такие что 2-форма $df \wedge \alpha$ не имеет нулей в $M \setminus \mathcal{C}_f$ и задает положительную ориентацию, и в окрестности любой критической точки $x \in \mathcal{C}_f$ существуют локальные координаты u, v , в которых либо $f = u^2 - v^2 + f(x)$, $\alpha = d(2uv)$, либо $f = \varkappa_{f,x}(u^2 + v^2) + f(x)$, $\alpha = \varkappa_{f,x} \frac{u dv - v du}{u^2 + v^2}$, где $\varkappa_{f,x} = \text{const} \neq 0$. Обозначим через $\mathbb{F}^1 := \mathbb{F}_{p,q,r}^1(M)$ пространство оснащенных функций Морса (f, α) , таких что $f \in F^1$. Снабдим C^∞ -топологией пространства F, \mathbb{F}^1 (см. [1, §4]).

Из теоремы С.В. Матвеева (см. [9]) следует, что $\pi_0(F) = 0$.

Обозначение (пермutoэдр и его грани). *Пермutoэдр порядка $q \in \mathbb{N}$* — это выпуклый $(q-1)$ -мерный многогранник, вложенный в q -мерное пространство, вершины которого получены перестановками координат вектора $(1, \dots, q)$. Опишем его подробнее: пусть e_1, \dots, e_q — стандартный базис \mathbb{R}^q , и пусть $\mathcal{P}^{q-1} \subset \mathbb{R}^q$ — выпуклая оболочка множества точек $P_\rho = \sum_{k=1}^q \left(k - \frac{q+1}{2}\right) e_{\rho_k}$, $\rho \in \Sigma_q$. Пермutoэдр \mathcal{P}^{q-1} имеет ровно $q!$ вершин P_ρ , $\rho \in \Sigma_q$, а его $(q-s)$ -мерные грани находятся во взаимно однозначном соответствии с упорядоченными разбиениями $J = (J_1, \dots, J_s)$ множества $\{1, \dots, q\}$ на s непустых подмножеств J_1, \dots, J_s . А именно, грань τ_J , отвечающая разбиению J — это выпуклая оболочка множества точек $(\Sigma_{r_1} \times \Sigma_{r_2-r_1} \times \dots \times \Sigma_{r_s-r_{s-1}})(P_\rho)$, где числа $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_{s-1} < r_s = q$ и перестановка $\rho \in \Sigma_q$ однозначно определяются условиями

$$J_1 = \{\rho_1, \dots, \rho_{r_1}\}, J_2 = \{\rho_{r_1+1}, \dots, \rho_{r_2}\}, \dots, J_s = \{\rho_{r_{s-1}+1}, \dots, \rho_{r_s}\}, \quad (1)$$

$\rho_1 < \dots < \rho_{r_1}, \rho_{r_1+1} < \dots < \rho_{r_2}, \dots, \rho_{r_{s-1}+1} < \dots < \rho_{r_s}$. Здесь $\Sigma_{r_1} \times \Sigma_{r_2-r_1} \times \dots \times \Sigma_{r_s-r_{s-1}}$ — подгруппа группы Σ_q , отвечающая разбиению $\{1, \dots, q\} = \{1, \dots, r_1\} \sqcup \{r_1+1, \dots, r_2\} \sqcup \dots \sqcup \{r_{s-1}+1, \dots, r_s\}$, и действие перестановки $\sigma \in \Sigma_q$ на точке P_ρ дает точку $P_{\sigma\rho}$, где $(\sigma\rho)_i := \rho_{\sigma_i}$, $1 \leq i \leq q$. Из описания граней многогранника \mathcal{P}^{q-1} следует, что условие $\tau_{\hat{J}} \subset \partial\tau_J$ равносильно тому, что разбиение \hat{J} получается из разбиения J путем измельчения.

Для каждой функции $f \in F$ рассмотрим множество $\mathcal{C}_{f,1} := \{y_j\}_{j=1}^q \approx \{1, \dots, q\}$ ее седловых критических точек (см. определение 1(А)) и евклидово векторное пространство 0-коцепей

$$H_f^0 := C^0(\mathcal{C}_{f,1}; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathcal{C}_{f,1}} \cong \mathbb{R}^q. \quad (2)$$

Рассмотрим в пространстве H_f^0 многогранник $\mathcal{P}_f^{q-1} \subset H_f^0$, являющийся образом пермutoэдра $\mathcal{P}^{q-1} \subset \mathbb{R}^q$ при какой-либо биекции $\mathcal{C}_{f,1} \rightarrow \{1, \dots, q\}$. Рассмотрим “вычисляющую” 0-коцепь

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}(f) := f|_{\mathcal{C}_{f,1}} = (c_1, \dots, c_q) \in (-1; 1)^{\mathcal{C}_{f,1}} \subset H_f^0,$$

сопоставляющую седловой точке $y_j \in \mathcal{C}_{f,1}$ значение $c_j := f(y_j)$, $1 \leq j \leq q$. Сопоставим 0-коцепи $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_q)$ упорядоченное разбиение $J = J(\mathbf{c}) = (J_1, \dots, J_s)$ множества седел $\mathcal{C}_{f,1} \approx \{1, \dots, q\}$, определяемое свойствами (1) и $c_{\rho_1} = \dots = c_{\rho_{r_1}} < c_{\rho_{r_1+1}} = \dots = c_{\rho_{r_2}} < \dots < c_{\rho_{r_{s-1}+1}} = \dots = c_{\rho_{r_s}}$. (То есть, J — это отношение частичного порядка на множестве седел $\mathcal{C}_{f,1}$ значениями функции $f|_{\mathcal{C}_{f,1}}$.)

Определение 2 (специальные оснащенные функции Морса). (А) *Сепаратрисой* оснащенной функции Морса $(f, \alpha) \in \mathbb{F}$ назовем образ такой интегральной траектории $\gamma: (0, 1) \rightarrow M \setminus \mathcal{C}_f$ поля ядер 1-формы α , для которой оба предела $\lim_{t \rightarrow 0^+} \gamma(t)$ и $\lim_{t \rightarrow 1^-} \gamma(t)$ существуют и принадлежат множеству \mathcal{C}_f , и хотя бы один из этих пределов является седловой точкой.

(В) Оснащенную функцию Морса $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1$ назовем *специальной*, если либо $q = 0$ (т.е. у функций из F отсутствуют седловые критические точки), либо выполнены следующие условия:

- (i) набор $\mathbf{c}(f) \in H_f^0$ седловых критических значений принадлежит многограннику $\frac{2}{q+1} \mathcal{P}_f^{q-1}$;
- (ii) пусть $\hat{\tau}$ – открытая грань многогранника \mathcal{P}_f^{q-1} , содержащая точку $\frac{q+1}{2} \mathbf{c}(f)$, и пусть $J = (J_1, \dots, J_s)$ – соответствующее упорядоченное разбиение множества седел $\mathcal{C}_{f,1}$ на непустые подмножества, т.е. $\tau = \tau_J^{q-s}$; тогда для любых двух седел $y_i, y_j \in \mathcal{C}_{f,1}$ из одного и того же подмножества J_k разбиения ($1 \leq k \leq s$) не существует сепаратрисы, соединяющей y_i и y_j .

Пусть $\mathbb{F}^0 := \mathbb{F}_{p,q,r}^0(M)$ – пространство специальных оснащенных функций Морса.

Группа диффеоморфизмов $\mathcal{D}^\pm := \text{Diff}(M)$ действует справа на пространстве \mathbb{F}^1 очевидным образом (см. [1, обозначение 2.3]). Очевидно, что \mathbb{F}^0 является \mathcal{D}^\pm -инвариантным.

Теорема 1. Пусть M – замкнутая ориентированная поверхность, $F = F_{p,q,r}(M)$ – пространство функций Морса на M , $\mathbb{F}^0 \subset \mathbb{F}^1$ – соответствующие пространства оснащенных функций Морса (см. определения 1, 2). Отображение включения $\mathbb{F}^0 \hookrightarrow \mathbb{F}^1$ является гомотопической эквивалентностью, причем соответствующие отображения и гомотопии могут быть выбраны \mathcal{D}^\pm -эквивариантными и сохраняющими отображение $\mathbb{F}^1 \rightarrow M^{p+q+r}/\Sigma_{p+q+r}$, $(f, \alpha) \mapsto \mathcal{C}_f$.

3. Доказательство теоремы 1. Предположим, что число седел $q \geq 1$. Фиксируем вещественное число $\kappa > 0$. Так как $\mathcal{P}^{q-1} \subset [-\frac{q-1}{2}; \frac{q-1}{2}]^q$, то $\kappa \mathcal{P}^{q-1} \subset (-\frac{\kappa q}{2}; \frac{\kappa q}{2})^q$. Рассмотрим отображение

$$\pi_\kappa: \mathbb{R}^q \rightarrow \kappa \mathcal{P}^{q-1},$$

переводящее любую точку $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^q$ в такую точку $\mathbf{c}' \in \kappa \mathcal{P}^{q-1}$, что $|\mathbf{c} - \mathbf{c}'| \leq |\mathbf{c} - \mathbf{c}''|$ для любой точки $\mathbf{c}'' \in \kappa \mathcal{P}^{q-1}$. В силу выпуклости пермutoэдра \mathcal{P}^{q-1} , такое отображение единственно.

Фиксируем оснащенную функцию Морса $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1$. Выберем какую-нибудь нумерацию $\mathcal{C}_{f,1} \approx \{1, \dots, q\}$ множества седловых точек, и с ее помощью отождествим $H_f^0 \cong \mathbb{R}^q$ и $\mathcal{P}_f^{q-1} \cong \mathcal{P}^{q-1}$. Пусть $\pi_{\kappa,f}: H_f^0 \rightarrow \kappa \mathcal{P}_f^{q-1}$ – композиция $H_f^0 \cong \mathbb{R}^q \xrightarrow{\pi_\kappa} \kappa \mathcal{P}^{q-1} \cong \kappa \mathcal{P}_f^{q-1}$. Рассмотрим на $M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$ гладкое поле неотрицательно определенных в каждой точке квадратичных форм $(df)^2 + \alpha^2$. Аналогично римановым метрикам, этому полю квадратичных форм отвечает функция длины $L(\gamma)$ регулярных кусочно-гладких путей γ на $M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$. Определим расстояние $\rho(x, y) = \rho_{f,\alpha}(x, y) := \inf(L(\gamma))$, $x, y \in M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$, где нижняя грань берется по регулярным кусочно-гладким путям γ на поверхности $M \setminus (\mathcal{C}_{f,0} \cup \mathcal{C}_{f,2})$ из x в y . Определим вещественное число $d_{j_1, j_2} = d_{j_2, j_1}$ равным расстоянию $\rho_{f,\alpha}(y_{j_1}, y_{j_2})$ между седловыми точками y_{j_1} и y_{j_2} при $1 \leq j_1 < j_2 \leq q$. Пусть $\mathbf{c}(f) = (c_1, \dots, c_q) \in (-1; 1)^q$ – набор седловых значений. Положим

$$\varepsilon = \varepsilon(f, \alpha) := \frac{1}{3} \min \left\{ 1, \min_{1 \leq j_1 < j_2 \leq q} d_{j_1, j_2}, 1 - \max_{1 \leq j \leq q} |c_j| \right\} \in \left(0; \frac{1}{3} \right], \quad (3)$$

$$\mathbf{c}' = (c'_1, \dots, c'_q) := \pi_{\frac{\varepsilon}{q+1}, f}(\mathbf{c}(f)) \in \frac{\varepsilon}{q+1} \mathcal{P}_f^{q-1} \subset \left(-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2} \right)^{C_{f,1}} \subset (-1; 1)^{C_{f,1}} \cong (-1; 1)^q. \quad (4)$$

Пусть $\hat{\tau}$ – открытая грань многогранника \mathcal{P}_f^{q-1} , содержащая точку $\frac{q+1}{\varepsilon} \mathbf{c}' \in \mathcal{P}_f^{q-1}$. Согласно обозначению, эта грань имеет вид $\tau = \tau_{\hat{J}}^{q-s}$ для некоторого $s \in [1; q]$ и некоторого разбиения $\hat{J} = (\hat{J}_1, \dots, \hat{J}_s)$

множества $\mathcal{C}_{f,1} \approx \{1, \dots, q\}$ на s подмножеств $\widehat{J}_k \approx \{\rho_{r_{k-1}+1}, \dots, \rho_{r_k}\}$, $1 \leq k \leq s$, см. (1). Напомним, что грань τ состоит из всех точек $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_q) \in H_f^0 \cong \mathbb{R}^q$, для которых

$$(c_{\rho_{r_{k-1}+1}}, \dots, c_{\rho_{r_k}}) \in \text{conv} \left(\sum_{r_k - r_{k-1}} (r_{k-1} + 1 - \frac{q+1}{2}, \dots, r_k - \frac{q+1}{2}) \right), \quad 1 \leq k \leq s, \quad (5)$$

см. (1). Положим $t_0 := -1 + \frac{\varepsilon}{2}$, $t_k := c_{\rho_{r_k}}(f) - c'_{\rho_{r_k}}$ при $1 \leq k \leq s$, $t_{s+1} := 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Определим функцию $h = h_{\mathbf{c}(f), \varepsilon}: [-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}] \rightarrow [-1; 1]$ формулой

$$h(t) = h_{\mathbf{c}(f), \varepsilon}(t) := t + t_0 + \sum_{k=0}^s (t_{k+1} - t_k) I_{(\frac{r_k}{q+1} - \frac{1}{2})\varepsilon, (\frac{r_{k+1}}{q+1} - \frac{1}{2})\varepsilon}(t), \quad -\frac{\varepsilon}{2} \leq t \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (6)$$

где $I_{a,b} \in C^\infty(\mathbb{R})$ – гладкое двухпараметрическое семейство функций с параметрами $a < b$, такое что $I'_{a,b} \geq 0$, $I_{a,b}|_{(-\infty; (2a+b)/3]} = 0$ и $I_{a,b}|_{[(a+2b)/3; +\infty)} = 1$ (определенное, например, как в [1, (6)]).

Лемма 1. Функция $h = h_{\mathbf{c}(f), \varepsilon}: [-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}] \rightarrow [-1; 1]$ является диффеоморфизмом отрезков, причем $t_0 < t_1 \leq \dots \leq t_s < t_{s+1}$. Кроме того, выполнены следующие условия:

- 1) $h_{\mathbf{c}(f), \varepsilon}(c'_j) = c'_j + t_k = c_j(f)$ для любого $j \in \widehat{J}_k \subset \{1, \dots, q\}$, $1 \leq k \leq s$;
- 2) в некоторой окрестности множества $\{c'_1, \dots, c'_q\} \cup \{-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\}$ в $[-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}]$ выполнено $h' \equiv 1$;
- 3) если $1 \leq u \leq s$, $0 = k_0 < k_1 < \dots < k_u = s$ и

$$\mathbf{c}(f) \in \overline{\pi_{\frac{\varepsilon}{q+1}, f}^{-1} \left(\frac{\varepsilon}{q+1} \overset{\circ}{T}_{(\widehat{J}_1 \cup \dots \cup \widehat{J}_{k_1}, \widehat{J}_{k_1+1} \cup \dots \cup \widehat{J}_{k_2}, \dots, \widehat{J}_{k_{u-1}+1} \cup \dots \cup \widehat{J}_{k_u})} \right)}, \quad (7)$$

то $t_1 = \dots = t_{k_1} \leq t_{k_1+1} = \dots = t_{k_2} \leq \dots \leq t_{k_{u-1}+1} = \dots = t_{k_u}$.

Доказательство. Покажем, что $t_0 < t_1$ и $t_s < t_{s+1}$. Так как $c_j(f) \in [-1 + 3\varepsilon; 1 - 3\varepsilon]$ в силу (3), $c'_j \in (-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2})$ в силу (4), то $t_1 - t_0 = c_{\rho_{r_1}}(f) - c'_{\rho_{r_1}} + 1 - \frac{\varepsilon}{2} > 0$, $t_{s+1} - t_s = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - c_{\rho_{r_s}}(f) + c'_{\rho_{r_s}} > 0$.

Покажем, что $t_1 \leq \dots \leq t_s$. Из вида граней пермutoэдра \mathcal{P}^{q-1} (см. обозначение) следует, что

$$\frac{\varepsilon}{q+1} \mathcal{P}_f^{q-1} = \left\{ \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_q) \in H_f^0 \cong \mathbb{R}^q \mid \Phi(\mathbf{c}) = 0, \Phi_{J_1}(\mathbf{c}) \leq 0, \emptyset \neq J_1 \subsetneq \{1, \dots, q\} \right\},$$

где линейные функции $\Phi, \Phi_{J_1}: H_f^0 \rightarrow \mathbb{R}$ определены формулами

$$\Phi(\mathbf{c}) := c_1 + \dots + c_q, \quad \Phi_{J_1}(\mathbf{c}) := - \sum_{j \in J_1} c_j + \frac{\varepsilon}{q+1} \sum_{i=1}^{|J_1|} (i - \frac{q+1}{2}) = - \sum_{j \in J_1} c_j + \frac{|J_1| - q}{2(q+1)} \varepsilon |J_1|.$$

В точке \mathbf{c}' достигается минимум функции $\widehat{\Phi}(\mathbf{c}) := \frac{1}{2} |\mathbf{c}(f) - \mathbf{c}|^2$ по всем точкам $\mathbf{c} \in \frac{\varepsilon}{q+1} \mathcal{P}_f^{q-1}$. Равенство $\Phi_{J_1}(\mathbf{c}) = 0$ равносильно тому, что $\mathbf{c} \in \tau_{(J_1, \widehat{J}_1)}^{q-2}$. Поэтому равенство $\Phi_{J_1}(\mathbf{c}') = 0$ равносильно тому, что $J_1 = \widehat{J}_1 \cup \dots \cup \widehat{J}_k$ для некоторого $k \in [1; s-1]$. По теореме Куна-Таккера [10] выполнено

$$\text{grad } \widehat{\Phi}(\mathbf{c}') + \lambda \text{grad } \Phi(\mathbf{c}') + \sum_{k=1}^{s-1} \lambda_k \text{grad } \Phi_{\widehat{J}_1 \cup \dots \cup \widehat{J}_k}(\mathbf{c}') = 0$$

для некоторых множителей Лагранжа $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_{s-1} \in \mathbb{R}$, $\lambda_k \geq 0$. Отсюда

$$\mathbf{c}(f) - \mathbf{c}' = \lambda(e_1 + \dots + e_q) - \sum_{k=1}^{s-1} \lambda_k(e_{\rho_1} + \dots + e_{\rho_{r_k}}) = \sum_{k=1}^s (\lambda - \sum_{i=k}^{s-1} \lambda_i)(e_{\rho_{r_{k-1}+1}} + \dots + e_{\rho_{r_k}}).$$

Поэтому для любого $j \in \widehat{J}_k$ имеем $c_j(f) - c'_j = \lambda - \sum_{i=k}^{s-1} \lambda_i$. Отсюда $t_1 \leq \dots \leq t_s$.

Из равенств $h(-\frac{\varepsilon}{2}) = -\frac{\varepsilon}{2} + t_0 = -1$, $h(\frac{\varepsilon}{2}) = \frac{\varepsilon}{2} + t_{s+1} = 1$, неравенств $t_0 < t_1 \leq \dots \leq t_s < t_{s+1}$ и неубывания функций $I_{a,b}$ следует, что $h \in \text{Diff}([-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}], [-1; 1])$.

Осталось доказать выполнение свойств 1)–3). Для каждой функции $I_{a,b}$ из определения функции h имеем $b - a = \frac{\varepsilon}{q+1}$. Отсюда и из определения функции $I_{a,b}$ следует, что в $\frac{\varepsilon}{3(q+1)}$ -окрестности точки $-\frac{\varepsilon}{2}$ в $[-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}]$ имеем $h(t) \equiv t + t_0$, в $\frac{\varepsilon}{3(q+1)}$ -окрестности отрезка $[(\frac{r_{k-1}+1}{q+1} - \frac{1}{2})\varepsilon; (\frac{r_k}{q+1} - \frac{1}{2})\varepsilon]$ имеем $h(t) \equiv t + t_k$, $1 \leq k \leq s$, а в $\frac{\varepsilon}{3(q+1)}$ -окрестности точки $\frac{\varepsilon}{2}$ в $[-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}]$ имеем $h(t) \equiv t + t_{s+1}$. С другой стороны, из условия $\frac{q+1}{\varepsilon} \mathbf{c}' \in \mathring{\tau}_{\widehat{J}}$ следует, что для любого $j \in \widehat{J}_k$ выполнено $c'_j \in [(\frac{r_{k-1}+1}{q+1} - \frac{1}{2})\varepsilon; (\frac{r_k}{q+1} - \frac{1}{2})\varepsilon]$, см. (5), откуда $h(c'_j) = c'_j + t_k$, $1 \leq k \leq s$.

Для любого $\mathbf{c} \in \pi_{\frac{\varepsilon}{q+1}, f}^{-1}(\mathring{\tau}_{(\widehat{J}_1 \cup \dots \cup \widehat{J}_{k_1}, \widehat{J}_{k_1+1} \cup \dots \cup \widehat{J}_{k_2}, \dots, \widehat{J}_{k_{u-1}+1} \cup \dots \cup \widehat{J}_{k_u})})$ имеем $\mathbf{c} - \pi_{\frac{\varepsilon}{q+1}, f}(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^u (\mu - \mu_i - \dots - \mu_{u-1})(e_{\rho_{r_{k_{i-1}-1}+1}} + \dots + e_{\rho_{r_{k_i}}})$ для некоторых $\mu, \mu_1, \dots, \mu_u \in \mathbb{R}$, $\mu_i \geq 0$. Значит, в случае (7) выполнено $t_{k_{i-1}+1} = \dots = t_{k_i} = \mu - \mu_i - \dots - \mu_{u-1}$, $1 \leq i \leq u$, где $k_0 := 0$. Лемма 1 доказана. \square

Доказательство теоремы 1. Шаг 1. Если $q = 0$, то $\mathbb{F}^0 = \mathbb{F}^1$ и доказывать нечего. Пусть далее число седел $q > 0$. Сопоставим оснащенной функции Морса $(f, \alpha) \in \mathbb{F}^1$ функцию Морса $\tilde{f} := h^{-1} \circ f$, где $h = h_{\mathbf{c}(f), \varepsilon(f, \alpha)}$ – диффеоморфизм из леммы 1. Из леммы 1 и определения 1 следует, что $(\tilde{f}, \alpha) \in \mathbb{F}$. Так как $h[-1; 1] = [-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}]$, то $\frac{2}{\varepsilon}(\tilde{f}, \alpha) \in \mathbb{F}^1$. Покажем, что $\frac{2}{\varepsilon}(\tilde{f}, \alpha) \in \mathbb{F}^0$. Так как $\mathbf{c}(\tilde{f}) = \mathbf{c}' \in \frac{\varepsilon}{q+1} \mathcal{P}_f^{q-1}$, то $\mathbf{c}(\frac{2}{\varepsilon} \tilde{f}) = \frac{2}{\varepsilon} \mathbf{c}' \in \frac{2}{q+1} \mathcal{P}_f^{q-1}$. Это доказывает выполнение условия (i) из определения 2 пространства \mathbb{F}^0 . Осталось проверить условие (ii). Пусть γ – сепаратриса оснащенной функции (f, α) , соединяющая седловые точки $y_i, y_j \in \mathcal{C}_{\tilde{f}, 1} = \mathcal{C}_{f, 1}$, $1 \leq i < j \leq q$. Тогда

$$|c_i - c_j| = |c_i - c_j| + \left| \int_{\gamma} \alpha \right| = \left| \int_{\gamma} df \right| + \left| \int_{\gamma} \alpha \right| = \int_{\gamma} (|df| + |\alpha|) \geq \int_{\gamma} \sqrt{df^2 + \alpha^2} \geq \rho_{f, \alpha}(y_i, y_j) \geq 3\varepsilon$$

в силу (3). Предположим также, что седловые точки принадлежат одному и тому же подмножеству \widehat{J}_k разбиения \widehat{J} , где $1 \leq k \leq s$. Тогда из леммы 1 следует, что $c_i = c'_i + t_k$ и $c_j = c'_j + t_k$, а потому $c_i - c_j = c'_i - c'_j$. Отсюда, с учетом $c'_i, c'_j \in (-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2})$, получаем $|c_i - c_j| = |c'_i - c'_j| < \varepsilon$, что противоречит вышеприведенному неравенству. Таким образом, $\frac{2}{\varepsilon}(\tilde{f}, \alpha) \in \mathbb{F}^0$, и возникает отображение

$$p_3: \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathbb{F}^0, \quad (f, \alpha) \mapsto \frac{2}{\varepsilon}(\tilde{f}, \alpha) = \frac{2}{\varepsilon(f, \alpha)} \left(h_{\mathbf{c}(f), \varepsilon(f, \alpha)}^{-1} \circ f, \alpha \right). \quad (8)$$

Шаг 2. Докажем непрерывность отображения $p_3: \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathbb{F}^0$.

Для любых $\kappa \in (0; 1)$ и $\mathbf{c} \in (-1 + \kappa; 1 - \kappa)^q$ рассмотрим диффеоморфизмы $m_{\frac{\kappa}{2}}: [-1; 1] \rightarrow [-\frac{\kappa}{2}; \frac{\kappa}{2}]$, $t \mapsto \frac{\kappa}{2}t$, и $h_{\mathbf{c}, \kappa} \circ m_{\frac{\kappa}{2}}: [-1; 1] \rightarrow [-1; 1]$, см. (6). Покажем, что сопоставление

$$H: (\mathbf{c}, \kappa) \mapsto h_{\mathbf{c}, \kappa} \circ m_{\frac{\kappa}{2}} \in \text{Diff}[-1; 1]$$

непрерывно на множестве таких пар (\mathbf{c}, κ) , что $\mathbf{c} \in (-1 + \kappa; 1 - \kappa)^q$ и $\kappa \in (0; 1)$. Пусть (\mathbf{c}, κ) – любая пара из этого множества, и $\mathring{\tau} := \mathring{\tau}_{(\widehat{J}_1, \dots, \widehat{J}_s)}$ – открытая грань многогранника \mathcal{P}^{q-1} , содержащая точку $\frac{q+1}{\kappa} \pi_{\frac{\kappa}{q+1}}(\mathbf{c}) \in \mathcal{P}^{q-1}$. Из определения $h_{\mathbf{c}, \kappa}$ и непрерывности $\pi_{\frac{\kappa}{q+1}}$ следует непрерывность ограничения H на множество таких пар (\mathbf{c}', κ') , что $\frac{q+1}{\kappa'} \pi_{\frac{\kappa'}{q+1}}(\mathbf{c}') \in \mathring{\tau}$. Осталось проверить непрерывность в точке (\mathbf{c}, κ) ограничения H на множество таких пар (\mathbf{c}', κ') , что $\mathbf{c}' \in \pi_{\frac{\kappa'}{q+1}}^{-1}(\frac{\kappa'}{q+1} \mathring{\tau}) \cup \overline{\pi_{\frac{\kappa'}{q+1}}^{-1}(\frac{\kappa'}{q+1} \mathring{\tau})}$, для любой открытой грани $\mathring{\tau}_1$ многогранника \mathcal{P}^{q-1} . Из непрерывности $\pi_{\frac{\kappa}{q+1}}$ следует, что если $\mathbf{c} \in \partial \left(\pi_{\frac{\kappa}{q+1}}^{-1}(\frac{\kappa}{q+1} \mathring{\tau}_1) \right)$, то $\tau \subset \tau_1$. Тогда грань τ_1 имеет вид $\tau_1 = \tau_{(\widehat{J}_1 \cup \dots \cup \widehat{J}_{k_1}, \widehat{J}_{k_1+1} \cup \dots \cup \widehat{J}_{k_2}, \dots, \widehat{J}_{k_{u-1}+1} \cup \dots \cup \widehat{J}_{k_u})}$.

Согласно лемме 1, имеем $t_1 = \dots = t_{k_1} \leq t_{k_1+1} = \dots = t_{k_2} \leq \dots \leq t_{k_{u-1}+1} = \dots = t_{k_u}$. Значит, $h_{\mathbf{c},\kappa}(t) = t + t_0 + \sum_{i=0}^u (t_{k_i+1} - t_{k_i}) I_{\left(\frac{r_{k_i}}{q+1} - \frac{1}{2}\right)\kappa, \left(\frac{r_{k_i+1}}{q+1} - \frac{1}{2}\right)\kappa}(t)$, где $k_0 := 0$, т.е. диффеоморфизм $h_{\mathbf{c},\kappa}$ определяется той же формулой, что и $h_{\mathbf{c}',\kappa'}$ при $\mathbf{c}' \in \pi_{\frac{\kappa'}{q+1}}^{-1}(\frac{\kappa'}{q+1}\overset{\circ}{\tau}_1)$. Непрерывность H доказана.

Согласно (8), выполнено $p_3(f, \alpha) = \frac{2}{\varepsilon(f, \alpha)}(h_{\mathbf{c}(f), \varepsilon(f, \alpha)}^{-1} \circ f, \alpha) = ((H(\mathbf{c}(f), \varepsilon(f, \alpha)))^{-1} \circ f, \frac{2}{\varepsilon(f, \alpha)}\alpha)$. Отображение $\text{Diff}[-1; 1] \rightarrow \text{Diff}[-1; 1]$, $H \mapsto H^{-1}$, непрерывно в C^∞ -топологии в силу [1, лемма 10.1]. Отсюда, а также из непрерывности функции $\varepsilon = \varepsilon(f, \alpha)$, сопоставления $f \mapsto \Sigma_q \mathbf{c}(f) \in \mathbb{R}^q / \Sigma_q$ и отображения H (см. выше), следует непрерывность отображения p_3 .

Шаг 3. Покажем, что отображение включения $i_3: \mathbb{F}^0 \hookrightarrow \mathbb{F}^1$ является гомотопической эквивалентностью. Композиция $i_3 \circ p_3: \mathbb{F}^1 \rightarrow \mathbb{F}^1$ переводит $(f, \alpha) \mapsto \frac{2}{\varepsilon}(h^{-1} \circ f, \alpha)$, где $\varepsilon = \varepsilon(f, \alpha)$, $h := h_{\mathbf{c}(f), \varepsilon} \in \text{Diff}([-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}], [-1; 1])$, см. лемму 1. Зададим гомотопию этой композиции в $\text{id}_{\mathbb{F}^1}$ формулой

$$(f, \alpha) \mapsto (f_t, \alpha_t) := (1 - t) \cdot \frac{2}{\varepsilon}(h^{-1} \circ f, \alpha) + t \cdot (f, \alpha), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Функция f_t является функцией Морса из F^1 с теми же линиями уровня и тем же множеством \mathcal{C}_f критических точек, что и у функции f , причем в силу части 2 леммы 1 функция f_t в окрестности каждой критической точки отличается от f домножением на положительное число $(1 - t)\frac{2}{\varepsilon} + t$ и прибавлением некоторой константы, а форма α_t отличается от α домножением на то же самое число. Отсюда следует, что гомотопия не выводит из пространства \mathbb{F}^1 .

Покажем, что ограничение на \mathbb{F}^0 этой гомотопии не выводит из пространства \mathbb{F}^0 . При отображении $m_{\frac{2}{\varepsilon}} \circ \pi_{\frac{\varepsilon}{q+1}, f}|_{\frac{2}{q+1}\mathcal{P}_f^{q-1}}$ образ любой открытой грани $\frac{2}{q+1}\overset{\circ}{\tau}$ многогранника $\frac{2}{q+1}\mathcal{P}_f^{q-1}$ лежит в грани $\frac{2}{q+1}\tau$. Отсюда следует, что если $\mathbf{c}(f) \in \frac{2}{q+1}\overset{\circ}{\tau}$, то $\mathbf{c}(f_t) = (1 - t)\frac{2}{\varepsilon}\pi_{\frac{\varepsilon}{q+1}, f}(\mathbf{c}(f)) + t\mathbf{c}(f) \in \frac{2}{q+1}\overset{\circ}{\tau}$ при $0 < t \leq 1$. Значит, паре (f_t, α_t) отвечает то же разбиение $J = (J_1, \dots, J_s)$, что и паре (f, α) . Поэтому выполнение условия (ii) для пар (f_t, α_t) , $0 < t \leq 1$, следует из выполнения аналогичного условия для пары (f, α) , с учетом $\alpha_t = ((1 - t)\frac{2}{\varepsilon} + t)\alpha$.

По построению, оба отображения i_3, p_3 и гомотопия \mathcal{D}^\pm -эквивариантны. Теорема 1 доказана.

4. Применение к исследованию гомотопического типа пространства функций Морса.

Обозначим через $F := F_{p,q,r;\hat{p},\hat{q},\hat{r}}(M)$ пространство, полученное из $F_{p,q,r}(M)$ введением нумерации у некоторых из критических точек (называемых отмеченными) для функций $f \in F_{p,q,r}(M)$, где $\hat{p}, \hat{q}, \hat{r}$ – количества отмеченных критических точек локальных минимумов, максимумов и седловых точек соответственно. Пусть $\mathbb{F}^0 := \mathbb{F}_{p,q,r;\hat{p},\hat{q},\hat{r}}^0(M)$ и $\mathbb{F}^1 := \mathbb{F}_{p,q,r;\hat{p},\hat{q},\hat{r}}^1(M)$ – соответствующие пространства оснащенных функций Морса. Пусть $\mathcal{D}^0 \subset \mathcal{D}^\pm$ – пространство диффеоморфизмов, гомотопных id_M в классе гомеоморфизмов. Снабдим C^∞ -топologией пространства $F, \mathbb{F}^1, \mathcal{D}^0$, см. [1, §4]. Из результатов [11, 12, 13] следует, что имеется гомотопическая эквивалентность

$$\mathcal{D}^0 \sim R_{\mathcal{D}^0}, \quad (9)$$

где $R_{\mathcal{D}^0}$ – одно из многообразий $SO(3)$ (при $M = S^2$), T^2 (при $M = T^2$) и точка (при $\chi(M) < 0$).

Предположим, что количество отмеченных критических точек $\hat{p} + \hat{q} + \hat{r} > \chi(M)$. Пусть

$$\widetilde{\mathbb{K}} := \widetilde{\mathbb{K}}_{p,q,r;\hat{p},\hat{q},\hat{r}} \subset \widetilde{\mathcal{M}} := \widetilde{\mathcal{M}}_{p,q,r;\hat{p},\hat{q},\hat{r}}$$

– комплекс оснащенных функций Морса и содержащее его $3q$ -мерное многообразие (см. [3, §4]). Согласно [4, §4], имеется гомеоморфизм $\overline{\text{Ev}}: \mathbb{F}^1 / \mathcal{D}^0 \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$. Рассмотрим универсальное пространство модулей $\widetilde{\mathbb{K}}^\infty := \overline{\text{Ev}}(\mathbb{F}^0 / \mathcal{D}^0) \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ специальных оснащенных функций Морса.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, и количество отмеченных критических точек

$$\hat{p} + \hat{q} + \hat{r} > \chi(M). \quad (10)$$

Имеются гомотопические эквивалентности и гомеоморфизм $F \sim F^1 \sim \mathbb{F}^0 \approx \mathcal{D}^0 \times \widetilde{\mathbb{K}}^\infty \sim R_{\mathcal{D}^0} \times \widetilde{\mathbb{K}}$.

Определение 3. Функции Морса $f, g \in F$ назовем *изотопными* ($f \sim_{\text{isot}} g$), если найдутся такие диффеоморфизмы $h_1 \in \mathcal{D}^0$ и $h_2 \in \text{Diff}^+(\mathbb{R})$, что $f = h_2 \circ g \circ h_1$ и h_1 сохраняет нумерацию отмеченных критических точек. Множество функций из F^1 , изотопных f , обозначим через $[f]$.

Лемма 2. *Имеется \mathcal{D}^0 -эквивариантный гомеоморфизм $\mathbb{F}^0 \approx \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathbb{K}}^\infty$. При этом $\tilde{\mathbb{K}}^\infty$ является сильным деформационным ретрактом $\tilde{\mathcal{M}}$, а $\tilde{\mathbb{K}}$ – сильным деформационным ретрактом $\tilde{\mathbb{K}}^\infty$.*

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из существования \mathcal{D}^0 -эквивариантного гомеоморфизма $\mathbb{F}^1 \approx \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathcal{M}}$, согласованного с $\overline{\text{Ev}}$ (см. [4, §4]). В силу теоремы 1, отображение включения $\mathbb{F}^0/\mathcal{D}^0 \approx \tilde{\mathbb{K}}^\infty \hookrightarrow \tilde{\mathcal{M}} \approx \mathbb{F}^1/\mathcal{D}^0$ является гомотопической эквивалентностью.

Согласно [3], имеются замкнутое покрытие $\tilde{\mathbb{K}} = \cup_{[f]} \mathbb{D}_{[f]}$ и открытое покрытие $\tilde{\mathcal{M}} = \cup_{[f]} \tilde{\mathcal{M}}_{\geq [f]}$, такие что $\mathbb{D}_{[f]} \subset \tilde{\mathcal{M}}_{\geq [f]}$, а также имеются выпуклые множества $D_{[f]} \subset S_{\geq [f]} \subset H_{[f]}^0 \cong \mathbb{R}^q$, $U_{[f]} \subset U_{[f]}^\infty \subset H_{[f]}^1 \cong \mathbb{R}^{2q}$, такие что отображение включения $\mathbb{D}_{[f]} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{\geq [f]}$ есть композиция $\mathbb{D}_{[f]} \approx (D_{[f]} \times U_{[f]})/\tilde{\Gamma}_{[f]} \subset (S_{\geq [f]} \times U_{[f]}^\infty)/\tilde{\Gamma}_{[f]} \approx \tilde{\mathcal{M}}_{\geq [f]}$, где $\tilde{\Gamma}_{[f]}$ – группа, действующая свободно, дискретно и покомпонентно на $S_{\geq [f]} \times U_{[f]}^\infty$ (более точные определения см. в [3, §4]). Из определения “вычисляющего” отображения $\text{Ev}: \mathbb{F}^1 \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ (см. [4, §4]) следует, что $\tilde{\mathbb{K}}^\infty = \cup_{[f]} \mathbb{D}_{[f]}^\infty$, где $\mathbb{D}_{[f]}^\infty \approx (D_{[f]} \times U_{[f]}^\infty)/\tilde{\Gamma}_{[f]}$. Отсюда $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathbb{K}}^\infty)$ – пара полиэдров (а потому корасслоение по теореме Борсука, см. [14, §5.5]). Поэтому $\tilde{\mathbb{K}}^\infty$ – сильный деформационный ретракт многообразия $\tilde{\mathcal{M}}$ (см. [15, Гл. 1, §4]).

Сильная деформационная ретракция для пары $\tilde{\mathbb{K}} \subset \tilde{\mathbb{K}}^\infty$ получается из сильных деформационных ретракций для пар соседних пространств в цепочке $\tilde{\mathbb{K}} = \tilde{\mathbb{K}} \cup \tilde{\mathbb{K}}_{-1}^\infty \subset \tilde{\mathbb{K}} \cup \tilde{\mathbb{K}}_0^\infty \subset \tilde{\mathbb{K}} \cup \tilde{\mathbb{K}}_1^\infty \subset \dots \subset \tilde{\mathbb{K}} \cup \tilde{\mathbb{K}}_{q-1}^\infty = \tilde{\mathbb{K}}^\infty$, где $\tilde{\mathbb{K}}_k^\infty := \cup_{\dim D_{[f]} \leq k} \mathbb{D}_{[f]}^\infty \subset \tilde{\mathbb{K}}^\infty$. Сильную деформационную ретракцию для пары $\tilde{\mathbb{K}} \cup \tilde{\mathbb{K}}_{k-1}^\infty \subset \tilde{\mathbb{K}} \cup \tilde{\mathbb{K}}_k^\infty$ определим с помощью сильных деформационных ретракций для пар $((D_{[f]} \times U_{[f]}) \cup (\partial D_{[f]} \times U_{[f]}^\infty))/\tilde{\Gamma}_{[f]} \subset (D_{[f]} \times U_{[f]}^\infty)/\tilde{\Gamma}_{[f]}$, таких что $\dim D_{[f]} = k$ (см. [3, §4]). \square

Доказательство теоремы 2. По теореме 1 и лемме 2 выполнено $\mathbb{F}^1 \sim \mathbb{F}^0 \approx \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathbb{K}}^\infty \sim \mathcal{D}^0 \times \tilde{\mathbb{K}}$. С учетом (9) и того, что забывающее отображение и отображение включения $\mathbb{F}^1 \rightarrow F^1 \hookrightarrow F$ являются гомотопическими эквивалентностями (см. [1, теорема 2.5]), получаем теорему 2. \square

Автор приносит благодарность С.А. Мелихову, Д.А. Пермякову и А.Т. Фоменко за полезные замечания и обсуждения.

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 10–01–00748-а, грантом программы “Ведущие научные школы РФ” НШ-3224.2010.1, грантом программы “Развитие научного потенциала высшей школы” РНП 2.1.1.3704 «Современная дифференциальная геометрия, топология и приложения» и грантом ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (контракты № 02.740.11.5213 и № 14.740.11.0794).

Список литературы

- [1] Кудрявцева Е.А., Пермяков Д.А., Оснащенные функции Морса на поверхностях // Матем. сб. 2010. **201**, № 4. 33–98.
- [2] Кудрявцева Е.А., Равномерная лемма Морса и критерий изотопности функций Морса на поверхностях // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2009. № 4. 13–22.
- [3] Кудрявцева Е.А., О гомотопическом типе пространств функций Морса на поверхностях // <http://arxiv.org/abs/1104.4796>
- [4] Кудрявцева Е.А., Топология пространств функций Морса на поверхностях // <http://arxiv.org/abs/1104.4792>

- [5] *Кудрявцева Е.А.*, Связные компоненты пространств функций Морса с фиксированными критическими точками // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2011. <http://arxiv.org/abs/1007.4398>
- [6] *Фоменко А.Т.*, Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем // ДАН СССР. 1986. **287**, № 5. 1071–1075.
- [7] *Матвеев С.В., Фоменко А.Т.*, Теория типа Морса для интегрируемых гамильтоновых систем с ручными интегралами // Матем. заметки. 1988. **43**, № 5. 663–671.
- [8] *Матвеев С.В., Фоменко А.Т., Шарко В.В.*, Круглые функции Морса и изоэнергетические поверхности интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб. 1988. **135(177)**, № 3. 325–345.
- [9] *Кудрявцева Е.А.*, Реализация гладких функций на поверхностях в виде функций высоты // Матем. сб. 1999. **190**, № 3. 29–88.
- [10] *Magaril-Пыаев G.G., Tihomirov V.M.*, Convex Analysis: Theory and Applications. URSS, 2003.
- [11] *Smale S.*, Diffeomorphisms of the 2-sphere // Proc. Amer. Math. Soc. 1959. **10**. 621–626.
- [12] *Earle C.J., Eells J. (Jr.)*, The diffeomorphism group of a compact Riemann surface // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. **73**, no. 4. 557–559.
- [13] *Earle C.J., Eells J. (Jr.)*, A fibre bundle description of Teichmüller theory // J. Diff. Geometry 1969. **3**. 19–43.
- [14] *Фоменко А.Т., Фукс Д.Б.*, Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.
- [15] *Спеньер Э.*, Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.